

Die Lithiumhäufigkeit und die Struktur der äußeren Konvektionszone in sonnenähnlichen Sternen

K.-H. BÖHM

Lehrstuhl für Theor. Astrophysik der Universität Heidelberg

(Z. Naturforschg. 21 a, 1107–1115 [1966]; eingegangen am 21. März 1966)

Professor Dr. W. GENTNER zum 60. Geburtstag gewidmet

The observations of the Lithium abundance and the isotope ratio Li^6/Li^7 in stars are briefly reviewed and some simple conclusions are drawn. It is emphasized that — in addition to the mechanism proposed by BODENHEIMER — a slow (timescale $\approx 10^9$ years) mixing process in main sequence F and G stars is necessary to account for the observations.

The present state of the theory of convective overshooting is reviewed in this context. Two new models of the outer solar convection zone are presented. The temperature at their lower boundaries are 2.04×10^6 °K and 2.27×10^6 °K, showing that only a rather small convective overshoot may be sufficient for mixing the matter in the convection zone with the layers, in which Li^7 is burnt.

Our models differ from earlier ones, because (when calculating the mean stratification) we take into account the condition that the mixing length can nowhere be larger than the distance from the nearest boundary of the convection zone. It is shown that this approach also leads to a slight change of the numerical factors in the formulae usually used.

Im Bereich der Hauptsequenzsterne der Spektraltypen F und G streuen die Lithiumhäufigkeiten bei spektroskopisch sonst völlig gleichartigen Objekten (d. h. Sternen gleichen Spektraltyps und gleicher Leuchtkraftklasse) um mindestens einen Faktor 25, wie kürzlich von HERBIG¹ gezeigt wurde. (Siehe auch WALLERSTEIN, HERBIG und CONTI².)

Ferner zeigen sehr junge Sterne ähnlichen Spektraltyps, die sogenannten T-Tauri-Sterne, Lithiumhäufigkeiten, die um einen Faktor der Größenordnung 100 über derjenigen der Sonne liegen. (Siehe HERBIG³, BONSACK und GREENSTEIN^{4, 5}, deren Arbeiten auf eine frühere Untersuchung von HUNGER⁶ zurückgehen.)

Diese beiden Entdeckungen gehören zu den interessantesten Ergebnissen der Sternspektroskopie der letzten Jahre, insbesondere weil sich — auf Grund der bekannten Tatsache, daß Li^6 bzw. Li^7 bereits bei $2.0 \cdot 10^6$ °K bzw. $2.4 \cdot 10^6$ °K durch (p, α)-Reaktionen im Laufe eines „typischen kosmischen Zeitintervalls“ ($5 \cdot 10^9$ Jahre) zerstört werden^{7, 8} — gleich eine Reihe von Interpretationsmöglichkeiten aufdrängen. So wurde z. B. von HERBIG¹ einerseits und von WEYMANN und SEARS⁹ andererseits die Möglichkeit

diskutiert, daß eine in einer sehr frühen Phase der Sternentwicklung erzeugte hohe Lithiumhäufigkeit durch eine hinreichend langsame Durchmischung der äußeren sichtbaren Schichten des Sternes mit Schichten hinreichend hoher Temperatur abgebaut wird. Falls diese Hypothese richtig ist, so wären die Häufigkeitsunterschiede des Lithium in Sternen gleichen Spektraltyps und gleicher Leuchtkraftklasse auf Altersunterschiede zurückzuführen. (Bekanntlich ändern die Hauptsequenz-Sterne ihre Position im HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm über lange Zeiträume nur sehr wenig, so daß man das Alter eines solchen Sternes nicht in einfacher Weise erkennen kann.) Daher ergibt sich sofort die Frage nach der Korrelation zwischen dem Alter eines Objektes und seiner Lithium-Häufigkeit^{1, 2, 10}. Diese Frage konnte bisher nur insofern teilweise beantwortet werden, als die Beobachtungen nicht im Widerspruch zur Annahme einer Korrelation zwischen Lithium-Häufigkeit und Alter stehen (manche Tatsachen, wie die hohen Li-Häufigkeiten der T-Tauri-Sterne und die geringe Li-Häufigkeit in der Sonne scheinen sogar sehr gut zu dieser Annahme zu passen), andererseits reichen die Beobachtungen

¹ G. H. HERBIG, *Astrophys. J.* **141**, 588 [1965].

² G. WALLERSTEIN, G. H. HERBIG u. P. S. CONTI, *Astrophys. J.* **141**, 610 [1965].

³ G. H. HERBIG, *The Properties of T Tauri Stars and Related Objects*, in *Advan. Astron. Astrophys.* **1**, 47 Academic Press, New York and London 1962.

⁴ W. K. BONSACK u. J. L. GREENSTEIN, *Astrophys. J.* **131**, 83 [1960].

⁵ W. K. BONSACK, *Astrophys. J.* **133**, 340 [1961].

⁶ K. HUNGER, *Astron. J.* **62**, 294 [1957].

⁷ Siehe z. B. M. SCHWARZSCHILD, *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton University Press, Princeton 1958.

⁸ D. FRANK-KAMENETSKII, *Physical Processes in Stellar Interiors*, Israel Program for Scientific Translation, 1962.

⁹ R. WEYMANN u. R. SEARS, *Astrophys. J.* **142**, 174 [1965].

¹⁰ G. WALLERSTEIN, *Observations of the Lithium Content of Stars in Visual Binary Systems*, Preprint, 1966.



jedoch noch nicht aus, um das Vorhandensein einer solchen Korrelation wirklich zu beweisen. (Siehe HERBIG¹, WALLERSTEIN¹⁰.) Relativ sicher ist, daß Hauptsequenzsterne von Sternhaufen (z. B. den Hyaden, siehe WALLERSTEIN, HERBIG und CONTI²) außerdem eine Korrelation zwischen Spektraltyp und Li-Häufigkeit zeigen, die im wesentlichen als Folge der unterschiedlichen Durchmischung von Sternen verschiedener Masse in ihren frühen Entwicklungsphasen verstanden werden kann (siehe BODENHEIMER¹¹).

Es scheint jedoch, daß eines der interessantesten astrophysikalischen Probleme nach wie vor die Frage nach einer Korrelation zwischen Alter und Li-Häufigkeit für Sterne mit sonst gleichartigen Eigenschaften (also auch gleicher Masse) ist. Der Zweck dieser Arbeit ist es, einige Bemerkungen über dieses Problem zu machen. Zunächst wollen wir jedoch im folgenden Abschnitt kurz die wichtigsten Beobachtungsergebnisse zusammenfassen.

Die wichtigsten Beobachtungsergebnisse und einige einfache Folgerungen

Lithium ist in Sternen bisher nur in Form einer einzigen Linie, nämlich der Resonanzlinie bei 6707 Å des neutralen Li nachgewiesen worden, obwohl in einigen Lithium-reichen Objekten die Linien 3232 Å und 6103 Å gerade an der Grenze der Nachweisbarkeit¹ liegen sollten. Auf der Sonne liegt in Flecken (in denen auf Grund der niedrigen Temperatur Lithium weniger stark ionisiert ist als auf der Sonnenscheibe) die Linie 6103 Å ebenfalls gerade an der Grenze der Nachweisbarkeit (SCHMAHL und SCHRÖTER¹²). Infolgedessen beruhen praktisch alle Methoden zur Bestimmung der Gesamthäufigkeit von Li auf der Messung der Äquivalentbreite von λ 6707. Auf diese Art können nur Li-Häufigkeiten in Sternen vom Typ F 5 und später bestimmt werden. In allen heißen Sternen ist das Li zu weitgehend ionisiert. Bei der Linie 6707 Å handelt es sich bekanntlich in Wirklichkeit um ein Dublett mit den Einzellinien des Li⁷ bei 6707,761 Å und 6707,912 Å und den Linien des Li⁶ bei 6707,921 Å und 6708,072 Å, wobei die kurzwellige Komponente jeweils die doppelte Intensität der langwelligeren hat. Man kann versuchen, unter Benutzung der

relativ großen Isotopenaufspaltung empirische Informationen über das Isotopenverhältnis Li⁶/Li⁷ zu gewinnen, indem man entweder die „Schwerpunktswellenlänge“ des „Blends“ aus den oben erwähnten vier Linien mißt (HERBIG¹³, WALLERSTEIN¹⁴, MERCHANT, BODENHEIMER und WALLERSTEIN¹⁵) oder indem man das Linienprofil des Blends im Detail studiert. (Siehe z. B. SCHMAHL und SCHRÖTER¹².) HERBIG¹ und WALLERSTEIN, HERBIG und CONTI² haben aus der Linie LiI 6707 Å und einer Reihe von Ca-Linien das Verhältnis

$$[\text{Li}/\text{Ca}] = \log \frac{\{\text{Li}\}^*/\{\text{Ca}\}^*}{\{\text{Li}\}^\odot/\{\text{Ca}\}^\odot} \quad (1)$$

hergeleitet, wobei $\{\text{Li}\}$ bzw. $\{\text{Ca}\}$ die Häufigkeiten des Li bzw. Ca darstellen, und * bzw. \odot Stern bzw. Sonne bedeuten.

Solche Messungen wurden für etwa 100 (Hauptsequenz-) Feldsterne der Spektraltypen F 5 – G 8 (Effektivtemperaturen 6500 °K bis 5000 °K) sowie für 23 Sterne im Sternhaufen Hyaden durchgeführt.

Es zeigt sich, daß bei einer Gruppe von Sternen ungefähr gleichen Alters (wie bei den Hyaden) eine Korrelation zwischen der Farbe eines Sterns (oder seinem Spektraltyp) und seiner Lithium-Häufigkeit besteht, und zwar in der Weise, wie das schematisch in Abb. 1 dargestellt ist. Bei $(B - V) \approx +0,65$, entsprechend einem $T_{\text{eff}} \approx 5600$ °K, findet man einen relativ abrupten Übergang von (im Mittel gesehen) hohen zu niedrigen Lithiumhäufigkeiten. Dieser Effekt kann, wie bereits erwähnt, im Prinzip auf Grund der Resultate der Rechnungen von BODEN-

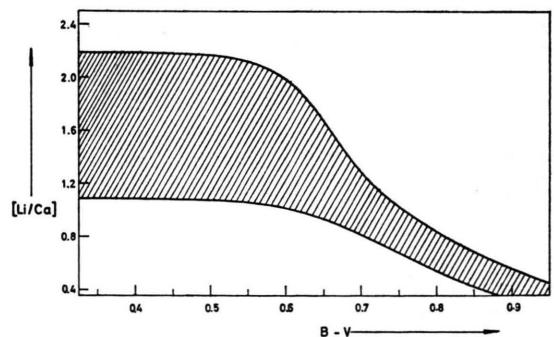


Abb. 1. Das logarithmische Verhältnis $[\text{Li}/\text{Ca}]$ (siehe Gl. 1) für die Hyaden als Funktion der Farbe $(B - V)$ in schematischer Darstellung. (Nach den Beobachtungen von WALLERSTEIN, HERBIG und CONTI².) Die Breite des schraffierten Gebietes kennzeichnet den Streubereich der Lithiumhäufigkeit.

¹¹ P. BODENHEIMER, *Astrophys. J.* **142**, 451 [1965].

¹² G. SCHMAHL u. E. H. SCHRÖTER, *Z. Astrophys.* **62**, 143 [1965].

¹³ G. H. HERBIG, *Astrophys. J.* **140**, 702 [1964].

¹⁴ G. WALLERSTEIN, *Astrophys. J.* **141**, 311 [1965].

¹⁵ A. E. MERCHANT, P. BODENHEIMER u. G. WALLERSTEIN, *Astrophys. J.* **142**, 790 [1965].

HEIMER¹¹⁾ verstanden werden: Bei masseärmeren Sternen (diese haben auf der Hauptsequenz die relativ niedrigeren Effektivtemperaturen bzw. ein größeres B-V) liegt die untere Begrenzung der äußeren Konvektionszone in der späteren Gravitationskontraktionsphase des Sternes so tief, daß – infolge der raschen Durchmischung der äußeren Schichten mit den hinreichend heißen, tiefen Schichten – Li⁶ und Li⁷ durch (p,α)-Reaktionen völlig zerstört werden.

Betrachtet man die Lithiumhäufigkeiten in den (Hauptsequenz-)Feldsternen (siehe Abb. 2), so findet man hier keinen so scharfen Übergang beim Spektraltyp G 3 (das würde etwa dem oben angegebenen B-V von +0,65 entsprechen), obwohl eine gewisse Tendenz zu einem solchen Verhalten durchaus zu erkennen ist. Auffallend ist in Abb. 2 eher die außergewöhnlich starke Streuung der Lithiumhäufigkeiten für einen angegebenen Spektraltyp. Tatsächlich ist diese Streuung noch stärker als es auf den ersten

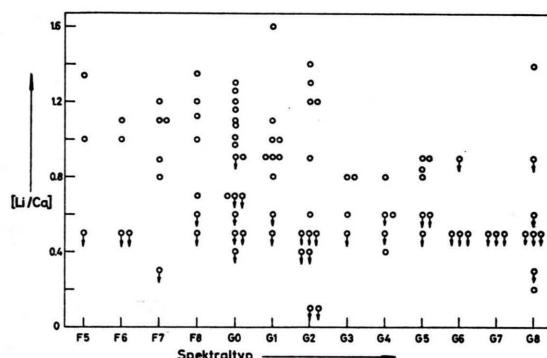


Abb. 2. Das logarithmische Verhältnis [Li/Ca] [siehe Gl. (1)] für 91 (Feld-)Hauptsequenzsterne als Funktion des Spektraltyps nach HERBIG¹. Kreise mit nach unten gerichteten Pfeilen kennzeichnen obere Grenzen für [Li/Ca] in dem betreffenden Stern.

Blick erscheint, da die allermeisten der niedrigen [Li/Ca]-Werte nur obere Grenzen darstellen. Diese Streuung könnte nach HERBIG¹ dadurch erklärt werden, daß die Sterne mit höherer Li-Häufigkeit ein kleineres Alter als solche niedriger Li-Häufigkeit haben. (Für diese Erklärung sprechen auch andere Argumente, siehe Einleitung.) Da jedoch die Li-Häufigkeiten einen weiten Bereich von Werten mehr oder weniger gleichmäßig überdecken, ist diese Erklärung nur möglich, wenn die Zerstörung des Li hinreichend langsam erfolgt (es ist eine Zeitskala der Größenordnung 10⁹ Jahre erforderlich). Ein solcher Mechanismus wäre eine hinreichend lang-

same Durchmischung der äußeren beobachtbaren Schichten und tiefer, hinreichend heißer Regionen. Wie HERBIG betont hat, ist diese Interpretation jedoch nicht ganz frei von Schwierigkeiten: Bei einer statistischen Prüfung des Zusammenhangs zwischen Li-Häufigkeit und Alter stellt sich heraus, daß es entweder in Sonnenumgebung zu wenige Sterne mit geringer Li-Häufigkeit gibt, oder daß die Sonne für ihr Alter zu wenig Lithium enthält. In diesem Zusammenhang schwer verständlich ist auch die Entdeckung von TORRES-PEIMBERT, WALLERSTEIN und PHILLIPS¹⁶, daß Kohlenstoffsterne eine hohe Lithiumhäufigkeit haben. Nach bisherigen Ideen handelt es sich bei Kohlenstoffsternen um Objekte in sehr fortgeschrittenen Entwicklungsphasen, in denen das Li längst infolge der Durchmischung äußerer und tiefliegender Schichten durch tiefgehende Konvektionszonen zerstört sein sollte. Diese Schwierigkeiten bei der Interpretation der Li-Häufigkeiten in einigen Sternen erscheinen jedoch nicht ausreichend, um die Vorstellung von der Korrelation zwischen Alter und Li-Häufigkeit wirklich zu widerlegen. Es gibt zu viele Beobachtungen, die diese Hypothese stützen¹. Außerdem ist es die einzige Hypothese, die bisher erlaubt hat, gewisse Ordnungsprinzipien auf die Beobachtungen anzuwenden.

Wie oben erwähnt, kann man im Prinzip auch das Isotopenverhältnis von Li⁶ zu Li⁷ in Sternatmosphären bestimmen. Die von HERBIG durchgeführte Untersuchung dieses Verhältnisses in 15 Feldsternen vom Spektraltyp F 5 V – G 8 V zeigt, daß in den untersuchten Fällen dieses Verhältnis zwischen 0 und etwa 0,6 liegt. Offensichtlich besteht keine klare Korrelation zwischen dem Isotopenverhältnis und der Gesamthäufigkeit des Li in einem Stern. Es ist möglich, daß es im wesentlichen zwei nahezu diskrete Gruppen von Sternen gibt, nämlich eine mit einem Verhältnis {Li⁶}/{Li⁷} von etwa null und eine andere mit {Li⁶}/{Li⁷} ≈ 0,5. Der Umfang des statistischen Materials sowie die derzeit erzielbare Genauigkeit bei der Messung des Isotopenverhältnisses reichen jedoch noch nicht aus, um diese Frage wirklich zu entscheiden. Die Tatsache, daß keine klar erkennbare Korrelation zwischen Isotopenverhältnis und Gesamthäufigkeit des Li vorhanden ist, widerspricht nicht notwendigerweise der HERBIGSchen Hypothese über den Zusammenhang zwischen der Lithiumhäufigkeit und dem Alter (bzw.

¹⁶ S. TORRES-PEIMBERT, G. WALLERSTEIN u. J. G. PHILLIPS, *Astrophys. J.* **140**, 1313 [1964].

der Entwicklungsphase) des Sternes. Reicht z. B. ein hinreichend langsamer Durchmischungsvorgang bis in Regionen mit Temperaturen, die erheblich höher als $2,4 \cdot 10^6$ °K sind, so werden sowohl Li⁶ als auch Li⁷ praktisch augenblicklich in der betreffenden Region zerstört, jedoch kann die große Zeitskala der Durchmischung dazu führen, daß in den beobachteten Schichten noch ein Bruchteil von Materie vorhanden ist, der noch nie in Schichten war, die so heiß sind, daß entweder Li⁶ oder Li⁷ verbrannt werden kann.

Auf eine überraschende Schwierigkeit führte andererseits die Beobachtung des Isotopenverhältnisses $\{\text{Li}^6\}/\{\text{Li}^7\}$ in den beiden Hyadensternen 45 Tauri [(B - V) = 0,36] und HD 27808 [(B - V) = 0,52] durch MERCHANT, BODENHEIMER und WALLERSTEIN¹⁵. Diese Autoren finden für beide Sterne ein Häufigkeitsverhältnis $\{\text{Li}^6\}/(\{\text{Li}^6\} + \{\text{Li}^7\}) \approx 0$. Wie erwähnt, scheint die generelle Abhängigkeit der gesamten Lithiumhäufigkeit von der Farbe (B - V) auf Grund der Theorie von BODENHEIMER¹¹ verständlich. Andererseits müßte aber für einen Stern wie 45 Tauri mit (B - V) = 0,36 nach dieser Theorie (die natürlich an wesentlicher Stelle vom heutigen Stand der Konvektionstheorie abhängt) das Verhältnis $\{\text{Li}^6\}/(\{\text{Li}^6\} + \{\text{Li}^7\})$ noch wie bei der Entstehung (BERNAS, GRADSZTAJN, REEVES und SCHATZMAN¹⁷) etwa 0,3 sein. (Siehe auch BERNAS, EPHERRE, GRADSZTAJN, KLAPISCH und YIOU¹⁸.) Für einen Stern mit (B - V) = 0,36 sollte nämlich nach der BODENHEIMERSchen Theorie im Laufe der Entwicklung bis zur Hauptsequenz weder das ursprüngliche Li⁷ noch Li⁶ zerstört worden sein. Dieses Problem konnte bisher noch nicht in befriedigender Weise geklärt werden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen:

1. Die z. Zt. sinnvollste Hypothese zur Deutung der beobachteten Gesamthäufigkeiten $\{\text{Li}^7\} + \{\text{Li}^6\}$ in Sternen sieht etwa folgendermaßen aus:

a) In einer sehr frühen Phase der Gravitationskontraktion (höchstwahrscheinlich vor der T-Tauri-Phase) wird das Li zusammen mit Beryllium und Bor durch Protonenbeschuß leichter Kerne (wie von BERNAS, GRADSZTAJN, REEVES und SCHATZMAN¹⁷ vorgeschlagen) gebildet.

¹⁷ R. BERNAS, E. GRADSZTAJN, H. REEVES u. E. SCHATZMAN, On the Nucleosynthesis of Lithium, Beryllium and Boron, Preprint 1966.

¹⁸ R. BERNAS, E. EPHERRE, E. GRADSZTAJN, R. KLAPISCH u. F. YIOU, Phys. Letters 15, 147 [1965].

b) Während der späteren Gravitationskontraktionsphasen wird in den hinreichend massearmen Sternen auf Grund einer tiefen äußeren Konvektionszone praktisch die gesamte beobachtbare Materie mit hinreichend heißen Schichten durchmischt.

c) Während der Hauptsequenzphase erfolgt für etwas massereichere Sterne eine weitere, jedoch (im Gegensatz zu b) sehr langsame Durchmischung, die zu einem Abbau des Lithium mit einer Zeitskala von etwa 10^9 Jahren führt. Man kann zeigen, daß es sich bei dieser Zeitskala aller Wahrscheinlichkeit nach wirklich um eine Durchmischungszeitskala und nicht um die Zeitskala der (p,α)-Reaktionen selbst, die das Li zerstören, handeln kann. Der Grund ist, daß die entsprechenden Reaktionsraten so temperaturempfindlich sind, daß man sonst einen sehr abrupten Übergang zwischen Sternen mit hohem und mit verschwindend kleinem Lithiumgehalt erwarten sollte. Diese Annahme wird außerdem durch die Tatsache gestützt, daß es Sterne mit relativ kleinem Li-Gehalt gibt, die noch ihr „ursprüngliches“ Verhältnis $\{\text{Li}^6\}/\{\text{Li}^7\}$ zeigen.

2. Nach den bisherigen Untersuchungen zeigt das beobachtete Häufigkeitsverhältnis der Isotopen Li⁶ und Li⁷ keine Korrelation mit irgendwelchen typischen Parametern der betreffenden Sterne. Es ist daher z. Zt. im allgemeinen noch nicht möglich, die in diesen Messungen enthaltenen Informationen auszunutzen.

Durchmischung mit langsamer Zeitskala infolge Eindringens von Konvektion („overshooting“) in die stabile Schicht

Die im vorigen Abschnitt unter 1 c) aufgeführte (auf HERBIG¹ zurückgehende) Forderung eines Durchmischungsvorganges sehr großer Zeitskala ($\approx 10^9$ Jahre) ist nicht ganz leicht zu erfüllen. (Siehe auch WEYMANN und SEARS⁹.) Die typische Zeidauer der Durchmischung der Konvektionszone eines sonnenähnlichen Sternes beträgt einige Monate, ist also außerordentlich kurz, verglichen mit der Zeitskala von 10^9 Jahren¹⁹. Es hilft uns daher nicht weiter, wenn man einfach annimmt, daß eine verbesserte

¹⁹ Bis jetzt nahm man an, daß die untere Begrenzung der äußeren Konvektionszone in einem G2-Stern bei einer Temperatur von etwa (höchstens) $1,9 \cdot 10^6$ °K liegt⁹. Siehe jedoch die weiter unten diskutierten neuen Modellrechnungen.

Theorie der thermischen Konvektionszonen zu einer größeren Dicke dieser Zonen führen würde. (Eine solche Vermutung ist bei dem heutigen, relativ unbefriedigenden Stand der Konvektionstheorie durchaus denkbar.) Die Durchmischungszeiten dieser dickeren Konvektionszonen wären wieder von der gleichen Größenordnung wie die charakteristischen Zeiten für die bisher untersuchten Konvektionszonen. Bisher sind nun zwei Effekte diskutiert worden, die möglicherweise wirklich auf eine lange Zeitskala der Durchmischung führen, nämlich 1) „overshooting“^{20, 21} und 2) Massenverlust von Sternen, die eine ausgedehnte äußere Konvektionszone haben. Bei dem zweiten Effekt, der ausführlich von WEYMANN und SEARS⁹ diskutiert wurde, wird die lange Durchmischungszeitskala nur simuliert. WEYMANN und SEARS haben selbst darauf hingewiesen, daß der durch das Studium der Sonne bekannte Massenverlust eines typischen G-Hauptsequenzsternes quantitativ bei weitem nicht ausreicht, um mit Hilfe dieses Effektes zu einer beobachtbaren Änderung der Li-Häufigkeit zu kommen.

Wir wollen uns im folgenden nur mit dem „overshooting“ befassen. Dabei handelt es sich, anschaulich gesprochen, um folgendes: Stellt man sich die Konvektion vor als ein Konglomerat und relativ heißen (infolge ihres Auftriebs aufsteigenden) und kühlen (infolge ihres negativen Auftriebs absteigenden) Gasballen, so ist es durchaus denkbar, daß einige der heißen aufsteigenden Gasballen die obere Grenze der Konvektionszone mit einem Temperaturüberschuß erreichen und dementsprechend infolge ihres Auftriebs noch ein Stück weit in die darüberliegende stabile Zone eindringen, bis ihre Temperatur der Umgebungstemperatur entspricht²². Ganz entsprechend können im Prinzip auch absteigende Gasballen über die untere Begrenzung hinaus in die darunterliegende Strahlungsgleichgewichtszone eindringen²³. Man sieht nun sofort folgendes: Auf Grund der Tatsache, daß die Durchmischungszeit der Konvektionszone selbst und die zur Interpretation der Beobachtungen geforderte Mischungszeitskala ($\approx 10^9$ Jahre) etwa im Verhältnis 10^{10} zu-

einander stehen, würde es schon ausreichen, wenn das „overshooting“ entweder mit einer außerordentlich geringen Strömungsgeschwindigkeit vonstatten ginge, oder wenn es nur außerordentlich selten vorkäme, daß ein Gasballen, der zufälligerweise einen relativ großen „Temperaturunterschub“ hat, relativ weit nach unten in die stabile Zone eindringt.

Bei einem ersten Versuch, quantitative Aussagen über das „Eindringen“ von Konvektion in die Schichten unterhalb der instabilen Zone zu erhalten, gingen wir vom linearisierten Konvektionsproblem^{20, 24} aus. Dabei werden die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung des Schwerefeldes

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \varrho \mathbf{g} \quad (2)$$

(ϱ = Dichte, \mathbf{v} = Strömungsgeschwindigkeit, p = Druck, \mathbf{g} = Schwerebeschleunigung, d/dt = substantielle Ableitung), die Kontinuitätsgleichung für ein kompressibles Medium und die Energiegleichung

$$\varrho \left\{ \frac{dE}{dt} + P \frac{d(1/\varrho)}{dt} \right\} = -\text{div } \mathbf{H}_{\text{str}} \quad (3)$$

(E = innere Energie pro Gramm Materie, H_{str} = Strahlungsstrom) in folgender Weise linearisiert; Man untersucht kleine Störungen einer mittleren Schichtung der Konvektionszone. Diese mittlere Schichtung sei vorher etwa mit Hilfe der Mischungswegtheorie berechnet worden. Dann sind alle Koeffizienten in dem linearisierten Problem im voraus (aus der bekannten mittleren Schichtung) zu berechnen. Man erhält ein System von partiellen Differentialgleichungen 4. Ordnung, das z. B. für die vertikale Geschwindigkeit w Lösungen von der Form²⁵ zuläßt:

$$w(x, y, z, t) = w^*(z) \exp\{n t + i(k_x x + k_y y)\} \quad (4)$$

(z = vertikale Koordinate).

Einsetzen von (4) in die linearisierte Form der Gl. (2), (3) und der Kontinuitätsgleichung liefert dann ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die z -abhängigen Anteile aller Störungsfunktionen (z. B. Geschwindigkeits-, Druck- und Temperatur-Störungen), das durch Randbedingungen zu

²⁰ K. H. BÖHM, *Astrophys. J.* **138**, 297 [1963].
²¹ K. H. BÖHM, The Outer Solar Convection Zone, Proc. I.A.U.-I.U.T.A.M. Sympos. Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, Nice 1965 (im Druck), siehe in diesem Zusammenhang auch W. C. SASLAW u. M. SCHWARZSCHILD, *Astrophys. J.* **142**, 1468 [1965].

²² Eine solche Modellvorstellung wurde diskutiert von: E. VITENSE, *Z. Astrophys.* **32**, 135 [1953].

²³ Konvektives „overshooting“ ist ein in der Meteorologie durchaus bekanntes Phänomen. Siehe z. B. die zusammenfassende Darstellung: D. W. MOORE, Penetrative Convection, in Proc. I.A.U.-I.U.T.A.M. Sympos. Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, Nice 1965 (im Druck).

²⁴ K. H. BÖHM, *Astrophys. J.* **137**, 881 [1963]; auch SASLAW und SCHWARZSCHILD²¹ verfahren in analoger Weise.

²⁵ Siehe z. B.: S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydro-magnetic Stability*, Oxford University Press, London 1961.

ergänzen ist. Für angegebene k_x und k_y steht noch das n (die zeitliche Anwachsrate der Störungen) als zu bestimmender Eigenwert in den Gleichungen.

Im Rahmen dieser linearisierten Theorie ist es nun relativ einfach, das „overshooting“ zu studieren: Bei den meisten Untersuchungen wurden die Randbedingungen an der oberen und der unteren Grenze der Konvektionszone auferlegt. Dadurch wird z. B. die vertikale Geschwindigkeit w an der Grenze der Konvektionszone künstlich auf den Wert null herunterdrückt. Schließt man andererseits die unter der eigentlichen Konvektionszone liegende Strahlungsgleichgewichtszone mit in das Studium der linearisierten Konvektionstheorie ein, indem man die Randbedingungen erst in hinreichend weitem Abstand unterhalb der unteren Grenze der Konvektionszone auferlegt, so werden die Lösungen von den unteren Randbedingungen weitgehend unabhängig. Die Strömungsgeschwindigkeit wird in diesem Falle unterhalb der unteren Grenze der Konvektionszone rasch abnehmen, weil die Strömung nun in ein Gebiet mit unteradiabatischem Temperaturgradienten eindringt und Arbeit gegen die Auftriebskräfte leisten muß.

In Abb. 3 sind die Ergebnisse solcher Rechnungen dargestellt, wobei das Verfahren noch weiter da-

durch vereinfacht ist, daß der Term $\operatorname{div} H_{\text{str}}$ in Gl. (3) vernachlässigt wurde. Es zeigt sich zunächst, daß nur die sogenannten „fundamental modes“ (Strömungsformen, bei denen die vertikale Geschwindigkeit w innerhalb der Konvektionszone keine Nullstelle hat) starkes „overshooting“ zeigen, und zwar nur dann, wenn ihre horizontale Wellenzahl

$$K = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \quad (5)$$

nicht größer als d^{-1} ist, wobei d die Dicke der Konvektionszone ist. Abb. 3 zeigt die Tiefenabhängigkeit der w für solche „modes“. Die Rechnungen beziehen sich auf ein Konvektionszonenmodell mit einer Dicke $d \approx 63000 \text{ km}$ (siehe BÖHM-VITENSE²⁶), wie es bis vor einigen Jahren akzeptiert wurde. Inzwischen wissen wir, daß die Dicke der Konvektionszone wahrscheinlich erheblich größer ist (s. u.). Das ändert jedoch wahrscheinlich die Resultate nicht in qualitativer Weise. Man sieht an Hand von Abb. 3, daß die Geschwindigkeiten für „fundamental modes“ mit großen horizontalen Wellenlängen zwar unterhalb der unteren Konvektionszonengrenze (gekennzeichnet durch die vertikale ausgezogene Linie) sehr rasch abnehmen, daß aber w bei etwa 100000 km andererseits durchaus noch so groß ist, daß eine

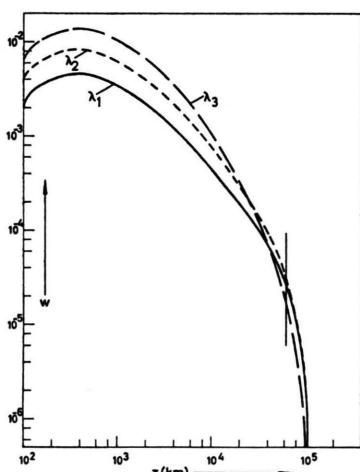


Abb. 3. Der Verlauf der vertikalen Strömungsgeschwindigkeit w (in willkürlichen Einheiten) als Funktion der vertikalen Koordinate z für die „fundamental modes“ (siehe Text) mit horizontalen Wellenlängen von 10^5 km (λ_1), $5 \cdot 10^4 \text{ km}$ (λ_2), $2,5 \cdot 10^4 \text{ km}$ (λ_3), für ein Modell mit einer Dicke der Konvektionszone von $6,3 \cdot 10^4 \text{ km}$. Die vertikale Gerade stellt die untere Begrenzung der Konvektionszone dar. Die Strömung jenseits dieser Linie ist das „overshooting“.

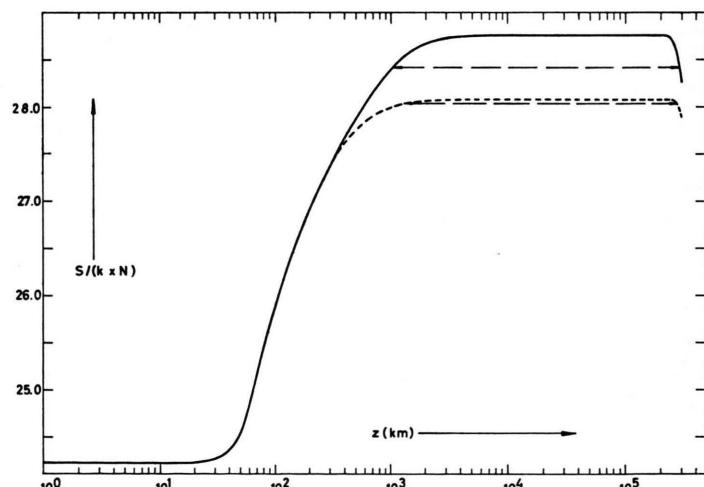


Abb. 4. Die Tiefenabhängigkeit der spezifischen Entropie ($S/k N$) für die Modelle

1 ————— 2 ————
der solaren Konvektionszone (siehe Text). Die horizontalen Geraden stellen das mögliche „overshooting“ zu einem Punkt mit $T=2,4 \cdot 10^6 \text{ K}$ schematisch dar. Die Tiefe z ist von der oberen Begrenzung der Konvektionszone gezählt.

²⁶ E. BÖHM-VITENSE, Z. Astrophys. 46, 108 [1958].

Durchmischung in relativ kurzen Zeitskalen erfolgen könnte.

Die Tatsache, daß nur die „fundamental mode“, eine Strömungsform, welche durch die ganze Konvektionszone geht, „overshooting“ zeigt, läßt sich in grober Weise folgendermaßen verstehen: Wir gehen zurück zu dem oben skizzierten einfachen Bild der auf- und absteigenden Gasballen. In Abb. 4 ist nun die mittlere Tiefenabhängigkeit der spezifischen Entropie für zwei neue Modelle (s. u.) der solaren Konvektionszone dargestellt. Gebiete, die gegen Konvektion stabil sind, zeigen eine Abnahme der mittleren Entropie mit der Tiefe. Ein einzelnes „Konvektionselement“ (Gasballen) erhält den größtmöglichen Dichteunterschied gegenüber seiner Umgebung (und kann damit am weitesten auf- oder absteigen), wenn es sich adiabatisch (also entlang einer Horizontalen im Entropiediagramm) bewegt. Andererseits darf die Horizontalen im allgemeinen für ein absteigendes Element nicht über der mittleren Entropiekurve liegen, da das Element sonst Arbeit gegen die Auftriebskräfte leisten muß und rasch abgebremst wird. — Die Horizontalen in Abb. 4 sind so gelegt, daß sie gerade die für die Li⁷-Verbrennung kritische Temperatur von $2,4 \cdot 10^6$ K erreichen. Man sieht sofort, daß ein Gasballen, wenn er überhaupt diese Region erreichen soll, sich bereits in den höchsten Schichten der Konvektionszone aus seiner Umgebung herausgelöst haben muß. Mit anderen Worten, er muß praktisch die gesamte Konvektionszone durchlaufen haben, um relativ starkes „overshooting“ zu zeigen. Das entspricht qualitativ dem Ergebnis der linearisierten Rechnung.

Was bedeuten die Resultate einer linearisierten Theorie nun für das „overshooting“ einer („turbulenten“) Konvektionszone mit hoher RAYLEIGH-Zahl? Man kann hier entweder den radikalen Standpunkt einnehmen, daß die Ergebnisse der linearisierten Rechnungen überhaupt nur sehr wenig mit der Wirklichkeit zu tun haben²⁷, oder man kann — weniger radikal — folgendermaßen argumentieren: Die oben erwähnten Rechnungen sagen bestenfalls aus, daß einige „modes“, d. h. einige Fourierkomponenten im turbulenten Konvektionsspektrum, relativ

starkes „overshooting“ zeigen. Für die Beantwortung der Frage, ob das „overshooting“ wirklich insgesamt wichtig ist, müßte man nun wissen, in welchem Maße die Fourierkomponenten mit starkem „overshooting“ im Spektrum der turbulenten Konvektion vorkommen. Da es sich bei diesen Komponenten um Strömungsformen handelt, welche die ganze Konvektionszone (also 100 oder mehr Äquivalenthöhen) überdecken, werden sie wahrscheinlich im Spektrum nur relativ schwach vertreten sein. Das „overshooting“ wird also sehr viel schwächer sein, als es nach dem Aussehen der Geschwindigkeitsprofile für einige ausgewählte „modes“ (Abb. 3) erscheint. Immerhin kann man einige Plausibilitätsargumente dafür angeben, daß eigentlich die Fourierkomponenten mit starkem „overshooting“ im Spektrum eine gewisse Rolle spielen sollten²⁸.

Eine ganz wesentliche Frage, die wir noch nicht diskutiert haben, ist nun die: Wie dick ist die eigentliche Konvektionszone und ein wie starkes „overshooting“ wird dementsprechend gebraucht? Zur Berechnung der Dicke der Konvektionszone steht bisher nur die Mischungswegtheorie zur Verfügung^{21, 22, 26, 28}. Eine gründliche Diskussion dieser Theorie vom Standpunkt des Hydrodynamikers hat KRAICHNAN²⁹ durchgeführt. Es hat sich nun ergeben, daß sowohl alle (kleineren) Modifikationen, die im Laufe der letzten Jahre an dieser Theorie vorgenommen wurden, als auch die Revision der in der Theorie eingehenden physikalischen Parameter zu einer Vergrößerung der Dicke der Konvektionszonen führten. Insbesondere ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen, daß nach Untersuchungen von COX und Mitarbeitern^{30, 31, 32} die Berücksichtigung der Linienabsorption zu einer erheblichen Erhöhung der Opazität insbesondere im Temperaturbereich $5 \cdot 10^4$ K $\lesssim T \lesssim 2 \cdot 10^6$ K führt. Diese Änderung gibt Anlaß zu einer Erhöhung des Strahlungsgleichgewichtsgradienten der Temperatur und damit zu einer Zunahme der Dicke der Konvektionszone. Dieser Effekt wurde bereits in den Rechnungen von WEYMAN und SEARS⁹ berücksichtigt. Nach den Ergebnissen dieser Autoren schien es, daß trotz der Berücksichtigung der Coxschen Opazität die untere Begrenzung der

²⁷ Dieser Gesichtspunkt wäre z. B. dann gerechtfertigt, wenn die konvektiven „modes“, sobald sie die Begrenzung der Konvektionszone erreichen, infolge nichtlinearer Effekte praktisch ihre gesamte Energie verbrauchen, um Schwerwellen zu erzeugen. Siehe dazu z. B. A. A. Townsend, J. Fluid Mech. **24**, 307 [1966].

²⁸ A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1955.

²⁹ R. KRAICHNAN, Phys. Fluids **5**, 1374 [1962].

³⁰ A. N. COX, J. N. STEWART u. D. D. EILERS, Astrophys. J. Suppl. **XI**, 1 [1965].

³¹ A. N. COX u. J. N. STEWART, Astrophys. J. Suppl. **XI**, 22 [1965].

³² A. N. COX, Stellar Absorption Coefficients and Opacities, in Stellar Structure (Hrsg. L. H. ALLER and D. McLAUGHLIN), University of Chicago Press, Chicago 1965.

Konvektionszone der Sonne keinesfalls tiefer als bei $1.9 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ liegen könnte.

Wir haben nun im Rahmen der Mischungswegtheorie einige neue Modelle der solaren Konvektionszone berechnet³³. Der eigentliche Ausgangspunkt unserer Rechnungen war die Feststellung, daß bei allen bisherigen Rechnungen (in denen der Mischungsweg bekanntlich mit der Druck- oder der Dichte-Äquivalenthöhe identifiziert wurde) der Mischungsweg in unmittelbarer Nähe der Begrenzung der Konvektionszone erheblich größer wird als der Abstand bis zu dieser Begrenzung. Dementsprechend steckt gerade bei der Behandlung der „thermischen Grenzschicht“ (auf die es in der Konvektionstheorie wesentlich ankommt²⁹) in den bisherigen Rechnungen eine gewisse Inkonsistenz. Es ist offensichtlich, daß der Mischungsweg mit dem Abstand von der Begrenzung gegen Null gehen muß³⁴. Bei unseren Rechnungen wurden im wesentlichen die „Standard“-Gleichungen der Mischungswegtheorie mit einigen leichten Modifikationen benutzt^{26, 21, 35}.

$$\frac{v^2}{l} = \frac{g}{H} l (\nabla - \nabla') Q, \quad (6)$$

(Bewegungsgleichung),

$$\frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} = \frac{\text{Pec}}{3} \quad (7)$$

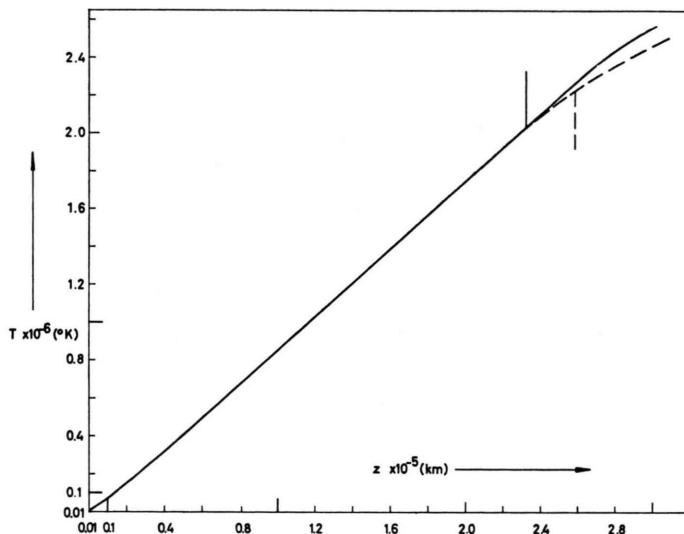


Abb. 5. Die Temperaturschichtung innerhalb der Konvektionszone für die Modelle

1 —————— 2 - - - -

Die vertikalen Geraden kennzeichnen die jeweilige untere Grenze der Konvektionszone.

³³ Über diese Rechnungen soll an anderer Stelle (Z. Astrophys.) ausführlich berichtet werden.

³⁴ Der Einwand, daß es sich hier ja nicht um eine starre Begrenzung handelt und daß das „overshooting“ gerade zeigt, daß die Strömungen über die Grenze der Konvektionszone hinausgehen, ist nicht ganz stichhaltig. Zwar ist — wie erwähnt — z. B. nach den Resultaten der linearisier-

(Verhältnis des Strahlungsverlustes zum Energieinhalt eines Gasballens, ausgedrückt durch die PECLET-Zahl, Pec)

$$\text{Pec} = \frac{3}{16} \frac{\varrho^2 c_p \varkappa v l}{\sigma T^3} \quad (8)$$

(Definition der PECLET-Zahl),

$$\varrho c_p v T \left(\frac{l}{H} \right) (\nabla - \nabla') + \frac{16}{3} \frac{\sigma T^4}{\varkappa \varrho H} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (9)$$

(Unabhängigkeit des Gesamtenergiestroms von der Tiefe).

Dabei hat generell ∇ die Bedeutung: $(d \ln T / d \ln P)$. Im einzelnen bezieht sich ∇ auf die mittlere Schichtung, ∇' auf einen einzelnen auf- oder absteigenden Gasballen, ∇_{ad} ist der adiabatische Gradient. Ferner sind v = mittlere vertikale Strömungsgeschwindigkeit, g = Schwerkraft, H = lokale Äquivalenthöhe (für den Druck, ϱ = Dichte, c_p = spezifische Wärme bei konstantem Druck, \varkappa = Opazität, l = Mischungsweg. Die Größe Q in (6) hat die Bedeutung:

$$Q = 1 - \frac{T}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \quad (10)$$

μ ist das mittlere Molekulargewicht.

Man beachte, daß die obigen Gleichungen (insbesondere Gl. 6) sich von der in der Astrophysik üblichen Standardform dadurch unterscheiden, daß hier über-

sierten Rechnungen „overshooting“ durchaus möglich, jedoch sind die dabei auftretenden Geschwindigkeiten erheblich kleiner als innerhalb der Konvektionszone²⁷. Es ist daher sicher richtig, im Rahmen der Mischungswegtheorie die Begrenzung der Konvektionszone ernst zu nehmen.

³⁵ E. A. SPIEGEL, *Astrophys. J.* **138**, 216 [1963].

all l anstatt $(l/2)$ steht. Es zeigte sich nämlich, daß man andernfalls Konvektionszonen erhält, die zu dünn sind (es wird $d \approx 4 \cdot 10^4$ km), um z. B. ein mit den Beobachtungen verträgliches Modell des inneren Aufbaus der Sonne zuzulassen. Diese Tatsache erscheint auch durchaus plausibel, denn es ist – wie oben erwähnt – ohne weiteres einzusehen, daß

$$l \leq z \quad (11)$$

(z = Abstand zur nächsten Grenze der Konvektionszone)

sein muß (mit unserer Definition von l) ; es erscheint jedoch nicht sinnvoll, zu verlangen, daß die charakteristische Länge kleiner als $(z/2)$ sein muß. Unsere Wahl der Zahlenfaktoren in (6) stimmt mit der von KRAICHNAN²⁹ überein. Wir haben zwei Modelle der solaren Konvektionszone berechnet mit folgender Annahme über den Mischungsweg:

$$l = z \text{ bis zu } z = H = (RT/\mu g), \text{ von dort } l = H \quad (12)$$

(Modell 1),

$$l = z \text{ in der ganzen Konvektionszone} \quad (13)$$

(Modell 2).

Das Entropiediagramm für diese beiden Modelle ist in Abb. 4 wiedergegeben, die Temperaturschichtung in Abb. 5. In Abb. 4 sind ebenfalls die horizontalen Geraden eingezeichnet, welche kennzeichnen, wo ein Gasballen sich aus seiner Umgebung herausgelöst haben muß, um beim „overshooting“ ein Gebiet mit einer Temperatur von $2,4 \cdot 10^6$ °K zu erreichen. Die wichtigsten Resultate sind:

Für Modell 1:

$$\begin{aligned} d &= 2,324 \cdot 10^5 \text{ km}; \quad T_1 = 2,036 \cdot 10^6 \text{ °K}; \\ \varrho_1 &= 1,15 \cdot 10^{-1} \text{ g cm}^{-3}; \\ p_1 &= 2,870 \cdot 10^{13} \text{ dyn cm}^{-2}; \quad z_0 = 1,088 \cdot 10^3 \text{ km}; \\ T_0 &= 1,618 \cdot 10^4 \text{ °K}; \quad \varrho_0 = 2,79 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}. \end{aligned}$$

Für Modell 2:

$$\begin{aligned} d &= 2,585 \cdot 10^5 \text{ km}; \quad T_1 = 2,271 \cdot 10^6 \text{ °K}; \\ \varrho_1 &= 1,85 \cdot 10^{-1} \text{ g cm}^{-3}; \\ p_1 &= 5,157 \cdot 10^{13} \text{ dyn cm}^{-2}; \quad z_0 = 1,392 \cdot 10^3 \text{ km}; \\ T_0 &= 1,736 \cdot 10^4 \text{ °K}; \quad \varrho_0 = 4,98 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}. \end{aligned}$$

Dabei sind d = Dicke der Konvektionszone; T_1 , ϱ_1 , p_1 = Temperatur, Dichte, Druck an der unteren Grenze der Konvektionszone; z_0 = Tiefe der Schicht (gezählt von der oberen Begrenzung der Konvektionszone), aus der sich ein Gasballen lösen müßte, um im „overshooting“ $T = 2,4 \cdot 10^6$ °K zu erreichen; T_0 und ϱ_0 sind Temperatur und Dichte im Punkt z_0 .

Es ist klar, daß es sehr schwierig, wenn nicht unmöglich ist, die Qualität von verschiedenen „Mischungsweg-Modellen“ gegeneinander abzuwagen. Es wird daher auch nicht behauptet, daß die obigen Modelle besser seien als andere. Wichtig scheint uns nur, zu zeigen, daß im Rahmen vernünftiger Annahmen Konvektionszonenmodelle gefunden werden können, bei denen an der unteren Grenze der kritische Wert $T = 2,4 \cdot 10^6$ °K zwar nicht erreicht wird, die jedoch diesem Wert so nahe kommen, daß ein relativ geringfügiges „overshooting“ ausreicht, um Schichten mit dieser kritischen Temperatur zu erreichen.

Die hier erwähnten numerischen Rechnungen wurden auf der Rechenanlage Siemens 2002 der Universität Heidelberg durchgeführt. Fräulein Eva STÜCKL hat dazu ein hier ursprünglich geschriebenes Fortranprogramm freundlicherweise in Algol übersetzt und damit eine Durchführung dieser Rechnungen auf der 2002 ermöglicht. Ich bin ihr dafür zu großem Dank verpflichtet.